מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מועד א' ־ פתרון, תשס"ט

1. דייק וענה בקיצור:

(א) הגדר 'חבורה למחצה'. **פתרון**. מערכת מתמטית הכוללת קבוצה S ופעולה בינארית $*$ היא חבורה למחצה אם הפעולה מקיימת את האקסיומה $x*(y*z)=(x*y)*z$ לכל $x,y,z \in S$. **הערה**. 'פעולה' מוכרחה להיות מוגדרת היטב, ובפרט סגורה; אין צורך לחזור על הפרט הזה.

(ב) השלם: H היא חבורה מסדר 48. לכן, לפי משפט קיילי, ... **פתרון**. לפי משפט קיילי, H איזומורפית לתת־חבורה של החבורה הסימטרית S_{48}.

(ג) שכתב כטענה המתייחסת לאיברים של החבורה G, שבה A,B תת־חבורות: "$A=\mathrm{C}_G(B)$" (כלומר, A הוא המרכֵּז של B). **פתרון**. לכל $g \in G$, $g \in A$ אם ורק אם $gb=bg$ לכל $b \in B$.
הערה. אפשר גם $A=\{g\in G \mid \forall b\in B: gb=bg\}$, למרות שזו אינה בדיוק טענה על איברים (אלא על קבוצות). אבל בוודאי לא נכון $A=\{g \mid \forall b: gb=bg\}$ או $A=\{g: gb=bg\}$.

(ד) נסח מחדש במונחים אלמנטריים בלבד (אינך מתבקש **להוכיח** את הטענה, אלא **לתרגם** אותה; בתשובה לא יופיעו סימונים המיוחדים לחוגי מנה): "$6+18\mathbb{Z}$ הוא מחלק אפס בחוג $R=\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$". **פתרון**. קיים $n \in \mathbb{Z}$ כך ש־ $18 \nmid n$ ו־ $18 \mid 6n$. **הערה**. 'מחלק אפס' היא תכונה המתייחסת לכפל ולא לחיבור בחוג. הגרסה 'קיים $0 \neq b \in R$ כך ש־ $b(6+18\mathbb{Z})=0$' אינה טובה, משום שיש בה סימונים המיוחדים לחוגי מנה: R והקוסט $6+18\mathbb{Z}$

2. תן דוגמא נגדית לשלוש מבין ארבע הטענות (השגויות) הבאות. נמק בקיצור נמרץ מדוע הדוגמא עונה על הדרישות:

(א) שני אברים מאותו סדר בחבורה הם צמודים לזה לזה. **פתרון**. בחבורה U_8, שני האיברים 3 ו־7 הם מסדר 2, אבל הם אינם צמודים כי החבורה אבלית.

(ב) בכל חבורה יש איבר לא טריוויאלי המתחלף עם כל איבר אחר. **פתרון**. המרכז של S_3 טריוויאלי, ולכן זו דוגמא נגדית. (גם החבורה הטריוויאלית היא דוגמא נגדית לגיטימית.) **הערה**. החבורה D_4 אינה דוגמא נכונה, משום שיש בה איבר מרכזי - σ^2. לא מספיק להצביע על זוג איברים בחבורה שאינם מתחלפים.

(ג) התמונה של תת־חבורה נורמלית היא נורמלית, כלומר: אם $\phi\colon G \to H$ הומומורפיזם ו־ $N \lhd G$, אז $\phi(N) \lhd H$. **פתרון**. נבחר $N=G=\mathbb{Z}_2$ ו־ $H=S_3$, עם ההומומורפיזם המוגדר על־ידי $\phi(1)=(12)$. למרות ש־ $N \lhd G$, $\phi(N)=\langle(12)\rangle$ אינה נורמלית ב־H.

(ד) אם לשתי חבורות אבליות יש אותו סדר ואותו אקספוננט, אז הן איזומורפיות. **פתרון**. לשתי החבורות $A=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ ו־ $B=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ יש סדר 16 ואקספוננט 4, אבל הן אינן איזומורפיות כי $|A^2|=4>2=|B^2|$.

3. בכל אחת מן השלשות הבאות יש שתי חבורות איזומורפיות, ואחת יוצאת דופן, שאינה איזומורפית להן. הסבר בקיצור מדוע החבורות בזוג אחד איזומורפיות זו לזו, ומדוע החבורות בזוג אחר אינן איזומורפיות.

(א) $A=U_{15}$, $B=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, $C=U_{12}\times U_3$. **פתרון**. $U_{12}=\{1,5,7,11\}\cong\langle 5\rangle\times\langle 7\rangle\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, ולכן $C=U_{12}\times U_3\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2=B$, אבל $A\not\cong C$ כי בחבורה הראשונה יש איבר, 2, שאינו מקיים את המשוואה $x^2=1$.

(ב) $A=\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_{12}$, $B=\mathbb{Z}_{30}\times\mathbb{Z}_8$, $C=\mathbb{Z}_{60}\times\mathbb{Z}_4$. **פתרון**. $A=\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_{12}\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_{60}\times\mathbb{Z}_4=C$, אבל $B\not\cong C$ כי $\exp(C)=60$ בעוד שב־B יש איבר מסדר 8, והרי $8\nmid 60$.

(ג) תת־החבורות $A=\langle(123),(456)\rangle$, $B=\langle(146)(235),(325)\rangle$ ו־ $C=\langle(246),(145)\rangle$ של S_6.
פתרון. מכיוון שאברי החבורות $\langle(456)\rangle,\langle(123)\rangle$ מתחלפים אלה עם אלה, ומכיוון שחיתוכן טריוויאלי, A היא מכפלה ישרה פנימית ו־ $A\cong\langle(123)\rangle\times\langle(456)\rangle\cong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$. גם $(146)(235)$ ו־(325) מתחלפים, ולכן $B\cong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ באותו אופן. **הערה**. למעשה $B=\langle(146)(235),(325)\rangle=\langle(146),(325)\rangle$ כי היוצרים של כל חבורה שייכים לחבורה השניה לעומת זאת $(145),(246)$ אינם מתחלפים, ולכן C אינה אבלית.

4. תהי N תת־חבורה נורמלית בחבורה G. הוכח שגם $\mathrm{Z}(N)\lhd G$. **פתרון**. $\mathrm{Z}(N)$ היא תת־חבורה של תת־חבורה של G, ולכן היא תת־חבורה של G **הערה**. אין צורך בבדיקת סגירות לכפל ולהפכי. יהיו $g\in G$ ו־$z\in \mathrm{Z}(N)$. $gzg^{-1}\in gNg^{-1}=N$, ולכל $n\in N$ מתקיים $gzg^{-1}\cdot n=g(z\cdot g^{-1}ng)g^{-1}=g(g^{-1}ng\cdot z)g^{-1}=n\cdot gzg^{-1}$ כי $g^{-1}ng\in N$. לכן $gzg^{-1}\in \mathrm{Z}(N)$. **הערה**. אין זה נכון שבהכרח $z=gzg^{-1}$. מיצאו דוגמא נגדית!

5. הוכח שלכל n איזוגי, $D_{2n}\cong \mathbb{Z}_2\times D_n$ (הצעה: הזכר בהגדרה של מכפלה ישרה פנימית). **פתרון**. נכתוב $G=\left\langle \sigma,\tau \mid \sigma^{2n}=\tau^2=1,\ \tau\sigma\tau^{-1}=\sigma^{-1}\right\rangle$. נבחר את תת־החבורות $A=\langle\sigma^n\rangle$ ו־$B=\left\langle\sigma^2,\tau\right\rangle=\left\{\sigma^{2i}\tau^j\right\}$. הצמדה ב־$\sigma$ וב־τ מראה שאלו תת־חבורות נורמליות; $\sigma^n\notin B$ כי n אי־זוגי, ולכן $A\cap B=1$. מאותה סיבה $AB=\left\langle\sigma^2,\tau,\sigma^n\right\rangle=\langle\sigma,\tau\rangle=G$. לכן G היא מכפלה פנימית ישרה של $A\cong\mathbb{Z}_2$ ושל $B\cong D_n$.

6. הוכח שכל חוג אוקלידי הוא ראשי. **פתרון**. יהי (R,d) חוג אוקלידי ויהי $0\neq I\lhd R$. נבחר איבר $0\neq a\in I$ עם $d(a)$ מינימלי. ברור ש־$Ra\subseteq I$. יהי $b\in I$; אפשר לחלק עם שארית ולכתוב $b=qa+r$ עם $d(r)<d(a)$; אבל $r=b-qa\in I$, והמינימליות של $d(a)$ מבטיחה ש־$r=0$; מכאן ש־$b\in Ra$; הוכחנו ש־$I=Ra$.

7. ענה על שניים מתוך שלושת הסעיפים:

(א) הוכח שהחוג $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ אינו איזומורפי לשדה מסדר 49. **פתרון**. בחוג הזה יש מחלקי אפס: $7^2=0$; לכן הוא אינו שדה.

(ב) מצא כמה פתרונות יש למשוואה x^5-x בשדה מסדר 5 ובשדה מסדר 9. **פתרון**. בשדה מסדר 5 כל האיברים הם פתרונות למשוואה הזו. החבורה הכפלית של השדה מסדר 9 היא מסדר 8, ולכן יש בה לפחות ארבעה שורשים של x^4-1; אבל לפולינום הזה לא יכולים להיות יותר מארבעה שורשים. יחד עם $x=0$, יש חמישה פתרונות.

(ג) p ראשוני. הוכח שכל פולינום אי־פריק ממעלה 2 מעל $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, מחלק את $x^{p^2}-x$ (אפשר להשתמש בכך שהשדה מסדר p^2 הוא יחיד). **פתרון**. יהי f פולינום אי־פריק ממעלה 2, ויהי $K=\mathbb{Z}_p[x]/\langle f\rangle$ השדה המתקבל מסיפוח שורש שלו ל־$\mathbb{Z}_p$. החבורה הכפלית של השדה הזה היא מסדר p^2-1, ולכן כל שורש α של הפולינום מקיים $\alpha^{p^2-1}=1$; לכן $\alpha^{p^2}-\alpha=0$, ו־$(x-\alpha)\mid x^{p^2}-x$. אבל שורשי הפולינום שונים זה מזה, ולכן $f\mid x^{p^2}-x$.